МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Н. КАРАЗИНА

ТЕРМОДИНАМИКА

УПРУГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методическое пособие
для студентов специальности "механика"

2009

УДК 531 : 539.3

ТЕРМОДИНАМІКА ПРУЖНЬО ДЕФОРМУЄМОГО ТВЕРДОГО ТІЛА. Методичний посібник для студентів III-IV курсів спеціальності “Механіка”
/ Укладач І.І. Ієвлев – Харків: ХНУ, 2009. – 25 с.

Методичний посібник містить опис термодинаміки пружньо деформуємого твердого тіла в приближенні лінійної теорії пружності, коли враховуються внутрішній момент кількості руху та розподілені момени пар сил. Сформульовані головні співвідношення, рівняння рівноваги та крайові умови на поверхні тіла. Наведен приклад розв’язання задачі рівноваги пружнього циліндру в полі лінійного електричного струму.

Рекомендовано студентам 3-4 курсів університету, що вивчають теорію пружності.

Рецензент: кандидат фіз.мат.наук, доцент С.О. Пославський

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (протокол №3 від 07.05. 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уравнения импульсов и кинетического момента

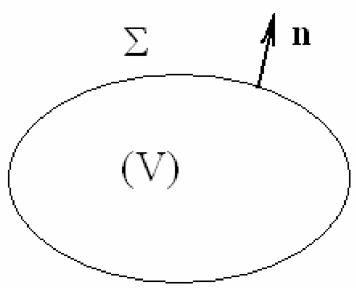

Рис.1

Рассматривается движение деформируемого твердого тела V, ограниченного поверхностью Σ (рис.1). Будем полагать, как это принято в линейной теории упругости, что перемещения точек тела $\vec{u}(t,\vec{r})$ и деформации малы. В этом случае лагранжевы и эйлеровы координаты точек тела совпадают, объем и форма тела при нагружении не меняются, скорости и перемещения точек связаны соотношением $\vec{\text{v}}(t,\vec{r}) = \partial\vec{u}(t,\vec{r})/\partial t$.

Уравнения изменения импульсов и кинетического момента выражают собой второй и третий законы механики сплошной среды, и в интегральной форме имеют вид [1-3]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{\text{v}}\,dV = \oint_\Sigma \vec{p}d\Sigma + \int_V \vec{X}dV \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\vec{r}\times\vec{\text{v}}+\vec{s}\right)dV = \oint_\Sigma\left(\vec{r}\times\vec{p}+\vec{m}\right)d\Sigma + \int_V\left(\vec{r}\times\vec{X}+\vec{Y}\right)dV \tag{2}$$

где

$\vec{p}$ - плотность поверхностных сил,

$\vec{X}$ - внешние объемные силы,

$\vec{m}$ - моменты пар сил, распределенных по поверхности Σ,

$\vec{Y}$ - моменты пар сил, распределенных по объему,

$\vec{s}$ - внутренний кинетический момент, обусловленный вращением частиц среды относительно своего центра масс. Его можно связать с вектором мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ вращающейся частицы посредством соотношения $\vec{s} = J\vec{\omega}$, где J представляет собой скалярную величину, фактически согласующую физические размерности $\vec{s}$ и $\vec{\omega}$. Подынтегральное выражение в левой части соотношения (2) определяет связь кинетического момента системы и относительного кинетического момент [4].А относительный кинетический момент $\vec{L}_c$ твердого тела представляется в виде произведения тензора инерции $\hat{J}$ на вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$: $\vec{L}_c = \hat{J}\cdot\vec{\omega}$. В случае тела со сферической симметрией тензор инерции становится шаровым и последнее соотношение принимает вид $\vec{L}_c = J\vec{\omega}$.

Как известно, поверхностные силы $\vec{p}$ могут быть заменены эквивалентными объемными силами $\vec{F}$, определяемыми через тензор напряжений $\hat{\sigma}$: $\vec{F} = div\,\hat{\sigma}$ [1]

$$\oint_\Sigma \vec{p}d\Sigma = \int_V div\,\hat{\sigma}dV \tag{3}$$

Аналогично, можно получитьзаписать главный момент поверхностных пар сил $\vec{m}$ через некоторые распределенные объемные моменты пар сил $\vec{M} = div\,\hat{\mu}$

$$\oint_{\Sigma} \vec{m} d\Sigma = \int_{V} div\,\hat{\mu} dV \qquad (4)$$

где $\hat{\mu}$ - тензор второго ранга [5].

Следует заметить, что формулы (3),(4) являются следствием известных соотношений (теорема Коши), выполняющихся для элементарных площадок, ориентированных единичной нормалью $\vec{n}$ [1,2]

$$\vec{p} = \vec{n} \cdot \hat{\sigma}, \quad \vec{m} = \vec{n} \cdot \hat{\mu} \qquad (5)$$

Из соотношения (1) вытекает дифференциальное уравнение движения [1-3]

$$\rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = div\,\hat{\sigma} + \vec{X} \qquad (6)$$

Далее, первое слагаемое в правой части уравнения (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\oint_{\Sigma} \left(\vec{r} \times \vec{p} + \vec{m}\right) d\Sigma = \oint_{\Sigma} \left(\vec{r} \times \vec{n} \cdot \hat{\sigma} + \vec{n} \cdot \hat{\mu}\right) d\Sigma = \\ &= \int_{V} \left(\vec{r} \times div\,\hat{\sigma} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^{T} + div\,\hat{\mu}\right) dV \end{aligned} \qquad (7)$$

где векторное слагаемое $\hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^{T}$, представляющее собой двойное внутренне произведение тензора третьего ранга $\hat{\hat{\varepsilon}}$ - тензора Леви-Чивита и транспонированного тензора напряжений $\hat{\sigma}^{T}$, которое в декартовой системе координат имеет компоненты $\left(\hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^{T}\right)_{i} = \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}$ (по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3!). А для преобразования левой части соотношения (2) воспользуемся теоремой переноса [2]

$$\frac{d}{dt}\int_{V} \rho\left(\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}} + \vec{s}\right) dV = \int_{V} \rho \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}} + \vec{s}\right) dV = \int_{V} \left(\vec{r} \times \rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \rho \frac{d\vec{s}}{dt}\right) dV$$

Воспользуемся уравнением движения (6), получим

$$\frac{d}{dt}\int_{V} \rho\left(\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}} + \vec{s}\right) dV = \int_{V} \left(\vec{r} \times div\,\hat{\sigma} + \vec{r} \times \vec{X} + \rho \frac{d\vec{s}}{dt}\right) dV \qquad (8)$$

Тогда после очевидных преобразований уравнение (2) можно представить в интегральной форме

$$\int_{V} \rho \frac{d\vec{s}}{dt} dV = \int_{V} \left(div\,\hat{\mu} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^{T} + \vec{Y}\right) dV$$

или в дифференциальной форме

$$\rho \frac{d\vec{s}}{dt} = div\,\hat{\mu} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^{T} + \vec{Y} \qquad (9)$$

Элементарная работа квазистатического деформирования тела

Для построения термодинамики твердого деформируемого тела требуется определить элементарную работу квазистатического деформирования. Пусть тело V, ограниченное поверхностью Σ, находится в равновесии под действием внешних объемных сил $\vec{X}$, поверхностных сил $\vec{p}$, моментов пар сил $\vec{m}$, распределенных по объему, и моментов пар сил $\vec{q}$, распределенных по поверхности Σ. В этом случае уравнений (6), (9) переходят в уравнения равновесия

$$0 = div\,\hat{\sigma} + \vec{X}\,, \quad 0 = div\,\hat{\mu} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T + \vec{Y} \tag{10}$$

Сообщим точкам тела виртуальные перемещения $\delta\vec{u}$ и повороты $\delta\vec{\varphi}$. Определим работу указанных выше сил на этих деформациях тела

$$\delta A^e = \int\limits_V \left(\vec{X} \cdot \delta\vec{u} + \vec{Y} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) dV + \oint\limits_\Sigma \left(\vec{p} \cdot \delta\vec{u} + \vec{m} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) d\Sigma \tag{11}$$

Воспользуемся уравнениями (10) и преобразуем (11) следующим образом

$$\begin{gathered} \delta A^e = -\int\limits_V \left[div\,\hat{\sigma} \cdot \delta\vec{u} + \left(div\,\hat{\mu} + \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \right) \cdot \delta\vec{\varphi} \right] dV + \\ + \oint\limits_\Sigma \left(\vec{p} \cdot \delta\vec{u} + \vec{m} \cdot \delta\vec{\varphi} \right) d\Sigma = \int\limits_V \left[\hat{\sigma}^T : \nabla\delta\vec{u} + \hat{\mu}^T : \nabla\delta\vec{\varphi} - \delta\vec{\varphi} \cdot \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \right] dV \end{gathered} \tag{12}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в правой части (12), будем рассматривать как работу внешних сил на виртуальных перемещениях, приходящуюся на единицу объема тела

$$\delta a^e = \hat{\sigma}^T : \nabla\delta\vec{u} + \hat{\mu}^T : \nabla\delta\vec{\varphi} - \delta\vec{\varphi} \cdot \hat{\hat{\varepsilon}} : \hat{\sigma}^T \tag{13}$$

Данное выражение играет основную роль при построении термодинамики деформируемого тела. Рассмотрим каждое из слагаемых, входящих в правую часть (13), производя все выкладки в декартовой системе координат.

Тензор второго ранга $\hat{\sigma}$ можно представить в виде суммы трех тензоров второго ранга: шарового $\sigma\hat{\delta}$, девиатора $\hat{\sigma}^{so}$ симметричной части исходного тензора $\hat{\sigma}$ и антисимметричной части $\hat{\sigma}^a$ тензора $\hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma\hat{\delta} + \hat{\sigma}^{so} + \hat{\sigma}^a \tag{14}$$

где $\sigma = \sigma_{mm}$ - след тензора $\hat{\sigma}$, $\hat{\delta}$ - единичный тензор.

Аналогичные представления можно указать и для всех остальных тензоров, входящих в выражение (13)

$$\begin{gathered} \hat{\mu} = \frac{1}{3}\mu\hat{\delta} + \hat{\mu}^{so} + \hat{\mu}^a \\ \nabla\delta\vec{u} = \delta\nabla\vec{u} = \frac{1}{3}\delta\vartheta\,\hat{\delta} + \delta\hat{\varepsilon}^{so} + \delta\hat{\varepsilon}^a \\ \nabla\delta\vec{\varphi} = \delta\nabla\vec{\varphi} = \frac{1}{3}\delta\kappa\,\hat{\delta} + \delta\hat{\kappa}^{so} + \delta\hat{\mathrm{K}} \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь

$$\hat{\varepsilon}^{so} = \varepsilon_{ij}^{so}\,\vec{e}_i\vec{e}_j = \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\vartheta\delta_{ij}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + \left(\nabla\vec{u}\right)^T\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right]\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (16)$$

$\vartheta = \left(\nabla\vec{u}\right)_{mm} = div\,\vec{u}$ - дилатация,

$$\hat{\varepsilon}^{a} = \varepsilon_{ij}^{a}\,\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} - \left(\nabla\vec{u}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (17)$$

$$\kappa = div\,\vec{\varphi} \qquad (18)$$

$$\hat{\kappa}^{so} = \kappa_{ij}^{so}\,\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi} + \left(\nabla\vec{\varphi}^T\right)\right] - \frac{1}{3}\kappa\hat{\delta} == \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\kappa\delta_{ij}\right]\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (19)$$

$$\hat{\mathrm{K}} = \kappa_{ij}^{a}\,\vec{e}_i\vec{e}_j = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi} - \left(\nabla\vec{\varphi}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (20)$$

Введем обозначение

$$\hat{\gamma} = \gamma_{ij}\,\vec{e}_i\vec{e}_j = \hat{\varepsilon}^{a} - \hat{\hat{\varepsilon}}\cdot\vec{\varphi} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \varepsilon_{ijk}\varphi_k\right]\vec{e}_i\vec{e}_j \qquad (21)$$

Тогда, учитывая то, что двойное внутреннее произведение между парами тензоров (шаровой, девиатор, антисимметричный) равняется нулю, запишем соотношение (13) в виде

$$\delta a^e = \frac{\sigma}{3}\delta\vartheta + \frac{\mu}{3}\delta\kappa + \hat{\sigma}^{so} : \delta\hat{\varepsilon}^{so} + \hat{\sigma}^{aT} : \delta\hat{\gamma} + \hat{\mu}^{so} : \delta\hat{\kappa}^{so} + \hat{\mu}^{aT} : \delta\hat{\mathrm{K}} \qquad (22)$$

Основное термодинамическое равенство

Для равновесных процессов в макросистемах имеет место основное термодинамическое равенство, являющееся следствием первого и второго законов термодинамики [6]. Если выполняется закон сохранения массы, то в терминах удельных массовых величин это равенство можно записать в виде

$$du = Tds + \frac{1}{\rho}\delta a^e$$

Здесь u, s - удельные величины внутренней энергии, энтропии. В рассматриваемом случае элементарная работа δa^e определяется соотношением (22), в котором виртуальные изменения параметров заменены действительными. Основное термодинамическое равенство принимает вид

$$du = Tds + \frac{\sigma}{3\rho}d\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}d\kappa + \frac{\hat{\sigma}^{so}}{\rho} : d\hat{\varepsilon}^{so} + \frac{\hat{\sigma}^{aT}}{\rho} : d\hat{\gamma} + \frac{\hat{\mu}^{so}}{\rho} : d\hat{\kappa}^{so} + \frac{\hat{\mu}^{aT}}{\rho} : d\hat{\mathrm{K}} \qquad (23)$$

в инвариантной форме, или

$$du = Tds + \frac{\sigma}{3\rho}d\vartheta + \frac{\mu}{3\rho}d\kappa + \frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho} : d\varepsilon_{ik}^{so} + \frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho} : d\gamma_{ik} + \frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho} : d\kappa_{ik}^{so} + \frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho} : d\mathrm{K} \qquad (24)$$

в координатной форме (декартова система координат!).

Внутренняя энергия u как термодинамический потенциал является функцией обобщенных термодинамических переменных $s, \vartheta, \kappa, \hat{\varepsilon}^{so} = \left\{ \varepsilon_{ik}^{so} \right\}_{i,k=1}^{3}$, $\hat{\gamma} = \left\{ \gamma_{ik} \right\}_{i,k=1}^{3}$, $\hat{\kappa}^{so} = \left\{ \kappa_{ik}^{so} \right\}_{i,k=1}^{3}, \hat{\mathrm{K}} = \left\{ \kappa_{ik}^{a} \right\}_{i,k=1}^{3}$. Свободная энергия f как термодинамический потенциал зависит от переменных $T, \vartheta, \kappa, \hat{\varepsilon}^{so} = \left\{ \varepsilon_{ik}^{so} \right\}_{i,k=1}^{3}, \hat{\gamma} = \left\{ \gamma_{ik} \right\}_{i,k=1}^{3}$, $\hat{\kappa}^{so} = \left\{ \kappa_{ik}^{so} \right\}_{i,k=1}^{3}, \hat{\kappa}^{a} = \left\{ \mathrm{K}_{ik} \right\}_{i,k=1}^{3}$ и удовлетворяет равенству

$$\begin{gathered} df = -sdT + \frac{\sigma}{3\rho} d\vartheta + \frac{\mu}{3\rho} d\kappa + \\ + \frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho} : d\varepsilon_{ik}^{so} + \frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho} : d\gamma_{ik} + \frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho} : d\kappa_{ik}^{so} + \frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho} : d\mathrm{K}_{ik} \end{gathered} \tag{25}$$

Так как, правая часть этого соотношения представляет собой полный дифференциал потенциала f, то отсюда вытекает ряд равенств:

1^0. термические уравнения состояния

$$\begin{gathered} \sigma = 3\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right)_{T,\kappa,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\gamma},\hat{\kappa}^{so},\hat{\mathrm{K}}}, \quad \mu = 3\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right)_{T,\vartheta,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\gamma},\hat{\kappa}^{so},\hat{\mathrm{K}}}, \\ \sigma_{ik}^{so} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}^{so}} \right)_{T,\kappa,\vartheta,\hat{\gamma},\hat{\kappa}^{so},\hat{\mathrm{K}}}, \quad \sigma_{ik}^{a} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}} \right)_{T,\kappa,\vartheta,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\kappa}^{so},\hat{\mathrm{K}}}, \\ \mu_{ik}^{so} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa_{ik}^{so}} \right)_{T,\kappa,\vartheta,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\gamma},\hat{\mathrm{K}}}, \quad \mu_{ik}^{a} = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{K}_{ik}} \right)_{T,\kappa,\vartheta,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\gamma},\hat{\mathrm{K}}} \end{gathered} \tag{26}$$

и калорическое уравнение

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\kappa,\vartheta,\hat{\varepsilon}^{so},\hat{\gamma},\hat{\kappa}^{so},\hat{\mathrm{K}}} \tag{27}$$

Соотношение (25) позволяет установить необходимые и достаточные условия устойчивости термодинамического равновесия [6,7]. Введем термодинамический потенциал Гиббса

$$g = u - Ts - \frac{\sigma}{3\rho}\vartheta - \frac{\mu}{3\rho}\kappa - \frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\varepsilon_{ik}^{so} - \frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\varepsilon_{ik}^{so} - \frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\gamma_{ik} - \frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\mathrm{K}_{ik} \tag{28}$$

Тогда основное термодинамическое неравенство, соответствующее соотношению (24) в терминах потенциала Гиббса имеет вид

$$\begin{gathered} dg \le -s\,dT + \frac{1}{3}\vartheta d\left(\frac{\sigma}{\rho} \right) + \frac{1}{3}\kappa d\left(\frac{\mu}{\rho} \right) + \varepsilon_{ik}^{so}\, d\left(\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho} \right) + \\ + \gamma_{ik}\, d\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho} \right) + \kappa_{ik}^{so}\, d\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho} \right) + \mathrm{K}_{ik}\, d\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho} \right) \end{gathered} \tag{29}$$

Рассмотрим упругое тело, находящееся в однородном напряженно деформированном состоянии, помещенное в термостат и имеющее постоянные внешние нагрузки (переменные, стоящие под знаком дифференциала в (29) принимают постоянные значения, равные $T^e,(\sigma/\rho)^e,(\mu/\rho)^e$, $(\sigma_{ik}^{so}/\rho)^e$, $(\mu_{ik}^{so}/\rho)^e$, $(\sigma_{ik}^{a}/\rho)^e$, $(\gamma_{ik}/\rho)^e,(\mu_{ik}^{a}/\rho)^e$).

Отсюда следует, что $dg<0$ и в состоянии термодинамического равновесия потенциал g принимает наименьшее значение. Необхоимое и достаточное условия минимума g относительно виртуальных изменений «внутренних» переменных $s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\kappa_{ik}^{so},\mathrm{K}_{ik}$ приводит к равенству нулю первой вариации δg и положительной определенности второй вариации $\delta^2 g$. Тогда, с учетом (24), получаем

$$\delta g =$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_{\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta s+\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)_{s,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta\vartheta+\left(\frac{\partial g}{\partial \kappa}\right)_{s,\vartheta,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta\kappa+$$

$$+\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ik}^{so}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta\sigma_{ik}^{so}+\left(\frac{\partial g}{\partial \kappa_{ik}^{so}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta\mu_{ik}^{so}+\left(\frac{\partial g}{\partial \gamma_{ik}s}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},,\mathrm{K}_{ik}}\delta\gamma_{ik}+$$

$$+\left(\frac{\partial g}{\partial \mathrm{K}_{ik}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}\delta\mathrm{K}_{ik}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}-T^e\right]\delta s+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_{s,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^e\right]\delta\vartheta+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \kappa}\right)_{s,\vartheta,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^e\right]\delta\kappa++\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ik}^{so}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}-\left(\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\right)^e\right]\delta\sigma_{ik}^{so}+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \mu_{ik}^{so}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}}-\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)^e\right]\delta\mu_{ik}^{so}+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma_{ik}s}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\mathrm{K}_{ik}}-\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)^e\right]\delta\gamma_{ik}+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{K}_{ik}}\right)_{s,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik}}-\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)^e\right]\delta\mathrm{K}_{ik}= \tag{30}$$

$$=\left[T-T^e\right]\delta s+\left[\frac{\sigma}{3\rho}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^e\right]\delta\vartheta+\left[\frac{\mu}{3\rho}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^e\right]\delta\kappa+\left[\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}-\left(\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\right)^e\right]\delta\varepsilon_{ik}^{so}+$$

$$+\left[\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}-\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)^e\right]\delta\kappa_{ik}^{so}+\left[\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}-\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)^e\right]\delta\gamma_{ik}+\left[\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}-\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)^e\right]\delta\mathrm{K}_{ik}=0$$

$$\delta^2 g =$$

$$=\delta T\delta s+\frac{1}{3}\delta\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)\delta\vartheta+\frac{1}{3}\delta\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\delta\kappa+\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\delta\varepsilon_{ik}^{so}+\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\delta\kappa_{ik}^{so}+\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\delta\gamma_{ik}+\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\delta\mathrm{K}_{ik}>0 \tag{31}$$

Из уравнения (30) следует, что внутренние параметры системы $T,\ \sigma/\rho,\ \mu/\rho,\ \sigma_{ik}^{so}/\rho,\ \mu_{ik}^{so}/\rho,\ \sigma_{ik}^{a}/\rho,\ \mu_{ik}^{a}/\rho$ равны внешним. Достаточное условие (31) приводит к ряду полезных неравенств между параметрами системы, в частности, для теплоемкости $c_{\varepsilon,\mu}$ при постоянных переменных $\vartheta, \kappa, \varepsilon_{ik}^{so}, \kappa_{ik}^{so}, \gamma_{ik}, \mathrm{K}_{ik}$

$$c_{\varepsilon,\mu} = T\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_{\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\kappa_{ik}^{so},\gamma_{ik},\mathrm{K}_{ik}} > 0 \qquad (32)$$

Пусть при ненапряженном состоянии

$$\sigma = \mu = 0, \quad \sigma_{ik}^{so} = \sigma_{ik}^{a} = \mu_{ik}^{so} = \mu_{ik}^{a} = 0 \qquad (33)$$

тела отсутствуют деформации, температура имеет постоянное значение и энтропия равна нулю

$$T = T_0, \quad \vartheta = \kappa = 0, \quad \hat{\varepsilon}^{so} = \hat{\gamma} = \hat{\kappa}^{so} = \hat{\mathrm{K}} = s = 0 \qquad (34)$$

Раскладывая в ряд Тейлора свободную энергию в окрестности указанного равновесия, вводя обозначение $\theta = T - T_0$ и отбрасывая члены выше второго порядка вместе с постоянным нулевым членом разложения, получим

$$\begin{aligned}
& f(\theta,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\kappa_{ik}^{o},\mathrm{K}_{ik}) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^r \theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^r \vartheta + \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa}\right)^r \kappa + \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r \varepsilon_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}}\right)^r \gamma_{ik} + \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa_{ik}^{so}}\right)^r \kappa_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{K}_{ik}}\right)^r \mathrm{K}_{ik} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)^r \theta^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \vartheta}\right)^r \theta\vartheta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \kappa}\right)^r \theta\kappa + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r \theta\varepsilon_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \gamma_{ik}}\right)^r \theta\gamma_{ik} + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \kappa_{ik}^{so}}\right)^r \theta\kappa_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \mathrm{K}_{ik}}\right)^r \theta\mathrm{K}_{ik} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}\right)^r \vartheta^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \kappa}\right)^r \vartheta\kappa + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r \vartheta\varepsilon_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \gamma_{ik}}\right)^r \vartheta\gamma_{ik} + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \kappa_{ik}^{so}}\right)^r \vartheta\kappa_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \mathrm{K}_{ik}}\right)^r \vartheta\mathrm{K}_{ik} + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \kappa^2}\right)^r \kappa^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \kappa \partial \varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r \kappa\varepsilon_{ik}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \kappa \partial \gamma_{ik}}\right)^r \kappa\gamma_{ik} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \kappa \partial \kappa_{ik}^{so}}\right)^r \kappa\kappa_{ik}^{so} + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \kappa \partial \mathrm{K}_{ik}}\right)^r \kappa\mathrm{K}_{ik} +
\end{aligned} \qquad (35)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\varepsilon_{mn}^{so}}\right)^r \varepsilon_{ik}^{so}\varepsilon_{mn}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\gamma_{mn}}\right)^r \varepsilon_{ik}^{so}\gamma_{mn} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r \varepsilon_{ik}^{so}\kappa_{mn}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r \varepsilon_{ik}^{so}\mathrm{K}_{mn} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\gamma_{mn} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r \gamma_{ik}\kappa_{mn}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r \gamma_{ik}\mathrm{K}_{mn} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa_{ik}^{so}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r \kappa_{ik}^{so}\kappa_{mn}^{so} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa_{ik}^{so}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r \kappa_{ik}^{so}\mathrm{K}_{mn} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa_{ik}^{a}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r \mathrm{K}_{ik}\mathrm{K}_{mn}$$

Здесь верхний индекс «r» вверху круглых скобок означает, что соответствующая функция берется для термодинамического равновесия (34). В силу соотношений (26), (27), (33), (34) слагаемые, содержащие первые производные функции f, обращаются в нуль.

Введем следующие обозначения

$$c^{\theta\theta} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)^r, \quad c^{\theta\vartheta} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\vartheta}\right)^r, \quad c^{\theta\kappa} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa}\right)^r,$$

$$c_{ik}^{\theta\varepsilon^{so}} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\theta\gamma} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\gamma_{ik}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\theta\kappa^{so}} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\kappa_{ik}^{so}}\right)^r,$$

$$c_{ik}^{\theta\mathrm{K}} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\mathrm{K}_{ik}}\right)^r, \quad c^{\vartheta\vartheta} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right)^r, \quad c^{\vartheta\kappa} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\kappa}\right)^r,$$

$$c_{ik}^{\vartheta\varepsilon^{so}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\vartheta\gamma} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\gamma_{ik}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\vartheta\kappa^{so}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\kappa_{ik}^{so}}\right)^r,$$

$$c_{ik}^{\vartheta\mathrm{K}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta\partial\mathrm{K}_{ik}}\right)^r, \quad c^{\kappa\kappa} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa^2}\right)^r, \quad c_{ik}^{\kappa\varepsilon^{so}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\right)^r, \tag{36}$$

$$c_{ik}^{\kappa\gamma} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\gamma_{ik}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\kappa\kappa^{so}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\kappa_{ik}^{so}}\right)^r, \quad c_{ik}^{\kappa\mathrm{K}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa\partial\mathrm{K}_{ik}}\right)^r,$$

$$c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\varepsilon^{so}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\varepsilon_{mn}^{so}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\gamma}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\gamma_{mn}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r$$

$$c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\mathrm{K}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\gamma\gamma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\gamma_{mn}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\gamma\kappa^{so}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r,$$

$$c_{ikmn}^{\gamma\mathrm{K}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma_{ik}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\kappa^{so}\kappa^{so}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa_{ik}^{so}\partial\kappa_{mn}^{so}}\right)^r,\quad c_{ikmn}^{\kappa^{so}\mathrm{K}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\kappa_{ik}^{so}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r,$$

$$c_{ikmn}^{\mathrm{KK}}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\mathrm{K}_{ik}\partial\mathrm{K}_{mn}}\right)^r$$

Тогда выражение для свободной энергии принимает вид

$$\begin{aligned}
&f(\theta,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\kappa_{ik}^{so},\mathrm{K}_{ik})=\\
&=-\frac{1}{2}c^{\theta\theta}\,\theta^2-c^{\theta\vartheta}\,\theta\vartheta-c^{\theta\kappa}\,\theta\kappa-c_{ik}^{\theta\varepsilon^{so}}\theta\,\varepsilon_{ik}^{so}-c_{ik}^{\theta\gamma}\theta\,\gamma_{ik}-c_{ik}^{\theta\kappa^{so}}\theta\,\kappa_{ik}^{so}-\\
&-c_{ik}^{\theta\mathrm{K}}\theta\,\kappa_{ik}^{a}+\frac{1}{2}c^{\vartheta\vartheta}\,\vartheta^2+c^{\vartheta\kappa}\vartheta\kappa+c_{ik}^{\vartheta\varepsilon^{so}}\vartheta\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ik}^{\vartheta\gamma}\vartheta\,\gamma_{ik}+\\
&+c_{ik}^{\vartheta\kappa^{so}}\vartheta\,\kappa_{ik}^{so}+c_{ik}^{\vartheta\mathrm{K}}\vartheta\,\mathrm{K}_{ik}+\frac{1}{2}c^{\kappa\kappa}\,\kappa^2+c_{ik}^{\kappa\varepsilon^{so}}\kappa\varepsilon_{ik}^{so}+a_{ik}^{\kappa\gamma}\kappa\,\gamma_{ik}+\\
&+c_{ik}^{\kappa\kappa^{so}}\kappa\,\kappa_{ik}^{so}+c_{ik}^{\kappa\mathrm{K}}\kappa\,\mathrm{K}_{ik}+\frac{1}{2}c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\varepsilon^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}\varepsilon_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\gamma}\varepsilon_{ik}^{so}\gamma_{mn}+\\
&+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}\kappa_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\mathrm{K}}\,\varepsilon_{ik}^{so}\mathrm{K}_{mn}+\frac{1}{2}c_{ikmn}^{\gamma\gamma}\,\gamma_{ik}\gamma_{mn}+c_{ikmn}^{\gamma\kappa^{so}}\gamma_{ik}\kappa_{mn}^{so}\\
&+c_{ikmn}^{\gamma\mathrm{K}}\gamma_{ik}\mathrm{K}_{mn}+c_{ikmn}^{\kappa^{so}\kappa^{so}}\,\kappa_{ik}^{so}\kappa_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\kappa^{so}\mathrm{K}}\,\kappa_{ik}^{so}\mathrm{K}_{mn}+\frac{1}{2}c_{ikmn}^{\mathrm{KK}}\,\mathrm{K}_{ik}\mathrm{K}_{mn}
\end{aligned}\tag{37}$$

Термические уравнения состояния (26) тогда, согласно выражению (37), преобразуются к следующему виду

$$\sigma=3\rho\left(c^{\vartheta\vartheta}\,\vartheta+c^{\vartheta\kappa}\,\kappa+c_{ik}^{\vartheta\varepsilon^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ik}^{\vartheta\gamma}\,\gamma_{ik}+c_{ik}^{\vartheta\kappa^{so}}\,\kappa_{ik}^{so}+c_{ik}^{\vartheta\mathrm{K}}\,\mathrm{K}_{ik}-c^{\theta\vartheta}\,\theta\right)\tag{38}$$

$$\mu=3\rho\left(c^{\kappa\kappa}\,\kappa+c_{ik}^{\kappa\varepsilon^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ik}^{\kappa\gamma}\,\gamma_{ik}+c_{ik}^{\kappa\kappa^{so}}\,\kappa_{ik}^{so}+c_{ik}^{\kappa\mathrm{K}}\,\mathrm{K}_{ik}+c^{\vartheta\kappa}\vartheta-c^{\theta\kappa}\,\theta\right)\tag{39}$$

$$\sigma_{ik}^{so}=\rho\left(c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\varepsilon^{so}}\,\varepsilon_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\gamma}\,\gamma_{mn}+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}}\,\kappa_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\mathrm{K}}\,\mathrm{K}_{mn}-c_{ik}^{\theta\varepsilon^{so}}\theta+c_{ik}^{\vartheta\varepsilon^{so}}\vartheta+c_{ik}^{\kappa\varepsilon^{so}}\kappa\right)\tag{40}$$

$$\sigma_{ik}^{a}=\rho\left(c_{ikmn}^{\gamma\gamma}\,\gamma_{mn}+c_{ikmn}^{\gamma\kappa^{so}}\kappa_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\gamma\mathrm{K}}\mathrm{K}_{mn}-c_{ik}^{\theta\gamma}\theta+c_{ik}^{\vartheta\gamma}\vartheta+c_{ik}^{\kappa\gamma}\kappa+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\gamma}\varepsilon_{ik}^{so}\right)\tag{41}$$

$$\mu_{ik}^{so}=\rho\left(c_{ikmn}^{\kappa^{so}\kappa^{so}}\,\kappa_{mn}^{so}+c_{ikmn}^{\kappa^{so}\mathrm{K}}\,\mathrm{K}_{mn}-c_{ik}^{\theta\kappa^{so}}\theta+c_{ik}^{\vartheta\kappa^{so}}\vartheta+c_{ik}^{\kappa^{so}\kappa}\kappa+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ikmn}^{\gamma\kappa^{so}}\gamma_{ik}\right)\tag{42}$$

$$\mu_{ik}^{a}=\rho\left(c_{ikmn}^{\mathrm{KK}}\,\mathrm{K}_{mn}-c_{ik}^{\theta\mathrm{K}}\theta+c_{ik}^{\vartheta\mathrm{K}}\vartheta+c_{ik}^{\kappa\mathrm{K}}\kappa+c_{ikmn}^{\varepsilon^{so}\mathrm{K}}\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ikmn}^{\gamma\mathrm{K}}\gamma_{ik}+c_{ikmn}^{\kappa^{so}\mathrm{K}}\,\kappa_{mn}^{so}\right)\tag{43}$$

Калорическое уравнение состояния (27) принимает вид

$$s=c^{\theta\theta}\theta+c^{\theta\vartheta}\vartheta+c^{\theta\kappa}\kappa+c_{ik}^{\theta\varepsilon^{so}}\,\varepsilon_{ik}^{so}+c_{ik}^{\theta\gamma}\gamma_{ik}+c_{ik}^{\theta\kappa^{so}}\kappa_{ik}^{so}+c_{ik}^{\theta\mathrm{K}}\mathrm{K}_{ik}\tag{44}$$

Соотношение $c_{\varepsilon,\mu} = T\left(ds / dT\right)_{\vartheta,\kappa,\hat{\varepsilon}^{so},\gamma,\hat{\kappa}^{so},\mathrm{K}} = T\left(\partial s / \partial\theta\right)_{\vartheta,\kappa,\hat{\varepsilon}^{so},\gamma,\hat{\kappa}^{so},\mathrm{K}}$ представляет собой теплоемкость при неизменных деформациях. Это позволяет выразить коэффициент $c^{\theta\theta}$ через $c_{\varepsilon,\mu}$ и записать формулу для определения энтропии в виде

$$s = \frac{c_{\varepsilon,\mu}}{T_0}\theta + c^{\theta\vartheta}\vartheta + c^{\theta\kappa}\kappa + c_{ik}^{\theta\varepsilon^{so}}\varepsilon_{ik}^{so} + c_{ik}^{\theta\gamma}\gamma_{ik} + c_{ik}^{\theta\kappa^{so}}\kappa_{ik}^{so} + c_{ik}^{\theta\mathrm{K}}\mathrm{K}_{ik} \qquad (45)$$

Изотропные среды

В случае изотропных сред термодинамические соотношения значительно упрощаются. В этом случае физические свойства материала не зависят от выбранного пространственного направления, поэтому свободная энергия $f(\theta,\vartheta,\kappa,\varepsilon_{ik}^{so},\gamma_{ik},\kappa_{ik}^{so},\mathrm{K}_{ik})$ может зависеть только от инвариантов независимых переменных тензорного типа. Если в разложениях функции f по своим аргументам ограничиться членами степени, не выше второго порядка, то среди инвариантов аргументов этой функции достаточно выбрать вторые инварианты

$$I_2^{\varepsilon^{so}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ik}^{so}\varepsilon_{ik}^{so}, \qquad I_2^{\gamma} = \frac{1}{2}\gamma_{ik}\gamma_{ik}, \qquad I_2^{\kappa^{so}} = \frac{1}{2}\kappa_{ik}^{so}\kappa_{ik}^{so},$$

$$I_2^{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\mathrm{K}_{ik}\mathrm{K}_{ik}, \qquad I_2^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}} = \varepsilon_{ik}^{so}\kappa_{ik}^{so}, \qquad I_2^{\gamma\mathrm{K}} = \gamma_{ik}\mathrm{K}_{ik}$$

т.к. первые инварианты для этих тензоров равны нулю. Выражение для свободной энергии принимает вид (предыдущие авторы не учитывают «перекрестные» эффекты))

$$\begin{gathered} f\left(\theta,\vartheta,\kappa,I_2^{\varepsilon^{so}},I_2^{\gamma},I_2^{\kappa^{so}},I_2^{\mathrm{K}},I_2^{\varepsilon^{so}\kappa^{so}},I_2^{\gamma\mathrm{K}}\right) = \\ = -\frac{c_V}{2T_0}\theta^2 - \alpha_1\theta\vartheta - \alpha_2\theta\kappa + \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1\right)\vartheta^2 + \\ + \left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\mu_{12}\right)\vartheta\kappa + \frac{1}{2}\left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\mu_2\right)\kappa^2 + \mu_1\varepsilon_{ik}^{so}\varepsilon_{ik}^{so} + \\ + 2\mu_{12}\varepsilon_{ik}^{so}\kappa_{ik}^{so} + \mu_2\kappa_{ik}^{so}\kappa_{ik}^{so} + \chi_1\gamma_{ik}\gamma_{ik} + 2\chi_{12}\gamma_{ik}\mathrm{K}_{ik} + \chi_2\mathrm{K}_{ik}\mathrm{K}_{ik} \end{gathered} \qquad (46)$$

а определяющие уравнения (38)- (44) приобретают форму

$$\begin{gathered} \sigma = 3\rho\left(\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1\right)\vartheta + \left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\mu_{12}\right)\kappa - \alpha_1\theta\right) \\ \mu = 3\rho\left(\left(\lambda_{12} + \frac{2}{3}\mu_{12}\right)\vartheta + \left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\mu_2\right)\kappa - \alpha_2\theta\right) \\ \sigma_{ik}^{so} = \rho\left(2\mu_1\varepsilon_{ik}^{so} + 2\mu_{12}\kappa_{ik}^{so}\right), \quad \sigma_{ik}^{a} = \rho\left(2\chi_1\gamma_{ik} + 2\chi_{12}\kappa_{ik}^{a}\right) \\ \mu_{ik}^{so} = \rho\left(2\mu_2\kappa_{ik}^{so} + 2\mu_{12}\varepsilon_{ik}^{so}\right), \quad \mu_{ik}^{a} = \rho\left(2\chi_2\kappa_{ik}^{a} + 2\chi_{12}\gamma_{ik}\right) \end{gathered} \qquad (47)$$

$$s=\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta+\alpha_1\vartheta+\alpha_2\kappa$$

Здесь введены новые обозначения феноменологических коэффициентов $\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\lambda_{12},\lambda_2,\mu_1,\mu_{12},\mu_2,\chi_1,\chi_{12},\chi_2$. Используя представление тензоров второго ранга (14), и вводя обозначения $\hat{\varepsilon}=\hat{\varepsilon}^s,\hat{\kappa}=\hat{\kappa}^s$ запишем выражение для тензоров $\hat{\sigma},\hat{\mu}$

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}&=\rho\left[\left(\lambda_1\vartheta+\lambda_{12}\kappa-\alpha_1\theta\right)\delta_{ik}+2\mu_1\varepsilon_{ik}+2\mu_{12}\kappa_{ik}+2\chi_1\gamma_{ik}+2\chi_{12}\mathrm{K}_{ik}\right]\\ \mu_{ik}&=\rho\left[\left(\lambda_{12}\vartheta+\lambda_2\kappa-\alpha_2\theta\right)\delta_{ik}+2\mu_{12}\varepsilon_{ik}+2\mu_2\kappa_{ik}+2\chi_{12}\gamma_{ik}+2\chi_2\mathrm{K}_{ik}\right]\end{aligned}\tag{48}$$

Выпишем основные соотношения в инвариантной форме, пригодной для любой системы координат

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}=\rho\left[\left(\lambda_1\vartheta+\lambda_{12}\kappa-\alpha_1\theta\right)\hat{g}+2\mu_1\hat{\varepsilon}+2\mu_{12}\hat{\kappa}+2\chi_1\hat{\gamma}+2\chi_{12}\hat{\mathrm{K}}\right]\\ &\hat{\mu}=\rho\left[\left(\lambda_{12}\vartheta+\lambda_2\kappa-\alpha_2\theta\right)\hat{g}+2\mu_{12}\hat{\varepsilon}+2\mu_2\hat{\kappa}+2\chi_{12}\hat{\gamma}+2\chi_2\hat{\mathrm{K}}\right]\\ &\hat{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}+\left(\nabla\vec{u}\right)^T\right],\quad \hat{\gamma}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u}-\left(\nabla\vec{u}\right)^T\right]-\hat{\hat{\varepsilon}}\cdot\vec{\varphi}\\ &\hat{\kappa}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi}+\left(\nabla\vec{\varphi}\right)^T\right],\quad \hat{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}\left[\nabla\vec{\varphi}-\left(\nabla\vec{\varphi}\right)^T\right]\end{aligned}\tag{49}$$

$\hat{g}-$метрический тензор

Запишем неравенство (31), учитывая равенство (25) и полагая все величины зависящими от перменных $T=T_0+\theta,\quad \vartheta,\quad \kappa,\quad \varepsilon_{ik}^{so},\quad \mu_{ik}^{so},\quad \gamma_{ik},\quad \mu_{ik}^{a}$

$$\begin{aligned}\delta^2 g=&\\ =&\left(\delta T\right)^2\frac{c_{\varepsilon,\mu}}{T}+\left(\delta\vartheta\right)^2\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)+\delta\vartheta\delta\kappa\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)+\\ &+2\delta\vartheta\delta\varepsilon_{ik}^{so}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\right)+2\delta\vartheta\delta\kappa_{ik}^{so}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)+\\ &+2\delta\vartheta\delta\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+2\delta\vartheta\delta\mathrm{K}_{ik}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)+\\ &+\left(\delta\kappa\right)^2\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)+2\delta\kappa\delta\varepsilon_{ik}^{so}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\sigma_{ik}^{so}}{\rho}\right)+\\ &+2\delta\kappa\delta\kappa_{ik}^{so}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)+2\delta\kappa\delta\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+\end{aligned}\tag{50}$$

$$+2\delta\kappa\delta\mathrm{K}_{ik}\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)+\left(\delta\varepsilon_{ik}^{so}\right)^{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+$$

$$+2\delta\varepsilon_{ik}^{so}\delta\kappa_{ik}^{so}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)+2\delta\varepsilon_{ik}^{so}\delta\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+$$

$$+2\delta\varepsilon_{ik}^{so}\delta\mathrm{K}_{ik}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ik}^{so}}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)+\left(\delta\kappa_{ik}^{so}\right)^{2}\frac{\partial}{\partial\kappa_{ik}^{so}}\left(\frac{\mu_{ik}^{so}}{\rho}\right)+$$

$$+2\delta\kappa_{ik}^{so}\delta\gamma_{ik}\frac{\partial}{\partial\kappa_{ik}^{so}}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+2\delta\kappa_{ik}^{so}\delta\mathrm{K}_{ik}\frac{\partial}{\partial\kappa_{ik}^{so}}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)+$$

$$+\left(\delta\gamma_{ik}\right)^{2}\frac{\partial}{\partial\gamma_{ik}}\left(\frac{\sigma_{ik}^{a}}{\rho}\right)+2\delta\gamma_{ik}\delta\mathrm{K}_{ik}\frac{\partial}{\partial\gamma_{ik}}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)+\left(\delta\mathrm{K}_{ik}\right)^{2}\frac{\partial}{\partial\mathrm{K}_{ik}}\left(\frac{\mu_{ik}^{a}}{\rho}\right)>0$$

Если воспользоваться лпределяющими уравнениями (47), неравенство (50) можно представить в более простой форме

$$\begin{gathered}\delta^{2}g=\frac{c_{\varepsilon,\mu}}{T}\left(\delta T\right)^{2}+\\+\left(\lambda_{1}+\frac{2}{3}\mu_{1}\right)\left(\delta\vartheta\right)^{2}+2\left(\lambda_{12}+\frac{2}{3}\mu_{12}\right)\delta\vartheta\delta\kappa+\left(\lambda_{2}+\frac{2}{3}\mu_{2}\right)\left(\delta\kappa\right)^{2}+\\+2\mu_{1}\left(\delta\varepsilon_{ik}^{so}\right)^{2}+4\mu_{12}\delta\varepsilon_{ik}^{so}\delta\kappa_{ik}^{so}+2\mu_{2}\left(\delta\kappa_{ik}^{so}\right)^{2}+\\+2\chi_{1}\left(\delta\gamma_{ik}\right)^{2}+4\chi_{12}\delta\gamma_{ik}\delta\mathrm{K}_{ik}+2\chi_{2}\left(\delta\mathrm{K}_{ik}\right)^{2}>0\end{gathered}\tag{51}$$

Отсюда вытекают следующие неравенства

$$\begin{gathered}\mu_{1}>0,\quad\mu_{2}>0,\quad\mu_{1}\mu_{2}-\mu_{12}^{2}>0,\quad\lambda_{1}>0,\quad\lambda_{2}>0\\\left(\lambda_{1}+\frac{2}{3}\mu_{1}\right)\left(\lambda_{2}+\frac{2}{3}\mu_{2}\right)-\left(\lambda_{12}+\frac{2}{3}\mu_{12}\right)^{2}>0\\\chi_{1}>0,\quad\chi_{2}>0,\quad\chi_{1}\chi_{2}-\chi_{12}^{2}>0\end{gathered}\tag{52}$$

Уравнения статики

Уравнения равновесия в инвариантной форме имеют вид (10) и содержат дивергентные слагаемые в правых частях. Подставляя соотношения (48) в (10) и считая феноменологические коэффициенты постоянными и пренебрегая слагаемыми, содержащими $\nabla\rho$, после простых преобразований получим уравнения

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{1}+\mu_{1}-\chi_{1}\right)\nabla\,div\,\vec{u}+\left(\lambda_{12}+\mu_{12}-\chi_{12}\right)\nabla\,div\,\vec{\varphi}-\alpha_{1}\nabla\theta+\\+\left(\mu_{1}+\chi_{1}\right)\Delta\vec{u}+\left(\mu_{12}+\chi_{12}\right)\Delta\vec{\varphi}+2\chi_{1}\,rot\vec{\varphi}+\frac{1}{\rho}\vec{X}=0\end{gathered}\tag{53}$$

$$\left(\lambda_{12}+\mu_{12}-\chi_{12}\right)\nabla\, div\,\vec{u}+\left(\lambda_2+\mu_2-\chi_2\right)\nabla\, div\,\vec{\varphi}-\alpha_2\nabla\theta+$$
$$+\left(\mu_{12}+\chi_{12}\right)\Delta\vec{u}+\left(\mu_2+\chi_2\right)\Delta\vec{\varphi}+3\chi_{12}\, rot\,\vec{\varphi}+2\chi_1\left(rot\,\vec{u}-2\vec{\varphi}\right)+\frac{1}{\rho}\vec{Y}=0 \quad (54)$$

Воспользуемся известной формулой векторного анализа $\Delta\vec{u}=\nabla\, div\,\vec{u}-rot\, rot\,\vec{u}$, и представим альтернативную форму уравнений равновесия (53), (54)

$$\left(\lambda_1+2\mu_1\right)\nabla\, div\,\vec{u}+\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\nabla\, div\,\vec{\varphi}-\alpha_1\nabla\theta-$$
$$-\left(\mu_1+\chi_1\right)rot\, rot\,\vec{u}-\left(\mu_{12}+\chi_{12}\right)rot\, rot\,\vec{\varphi}+2\chi_1\, rot\vec{\varphi}+\frac{1}{\rho}\vec{X}=0$$
$$\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\nabla\, div\,\vec{u}+\left(\lambda_2+2\mu_2\right)\nabla\, div\,\vec{\varphi}-\alpha_2\nabla\theta+ \quad (55)$$
$$-\left(\mu_{12}+\chi_{12}\right)rot\, rot\,\vec{u}-\left(\mu_2+\chi_2\right)rot\, rot\,\vec{\varphi}+3\chi_{12}\, rot\,\vec{\varphi}+$$
$$+2\chi_1\left(rot\,\vec{u}-2\vec{\varphi}\right)+\frac{1}{\rho}\vec{Y}=0$$

Следствие. Из уравнеий (55) следует, что в отсутствие внешних сил $\vec{X}=0$ и распределенных моментов сил $\vec{Y}=0$ в однородном тепловом поле $(\theta=0)$ дилатация ϑ и «дилатация» κ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\lambda_1+2\mu_1\right)\Delta\vartheta+\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\Delta\kappa=0$$
$$\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\Delta\vartheta+\left(\lambda_2+2\mu_2\right)\Delta\kappa+4\chi_1\kappa=0$$

откуда следует, что имеет место уравнение Гельмгольца

$$\Delta\kappa+4\chi_1\frac{\lambda_{12}+2\mu_{12}}{\left(\lambda_1+2\mu_1\right)\left(\lambda_2+2\mu_2\right)-\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)^2}\kappa=0$$

Граничные условия. На границе Σ деформируемого тела могут быть заданы граничные условия первого рода

$$\vec{u}\big|_\Sigma=\vec{u}^o,\quad \vec{\varphi}\big|_\Sigma=\vec{\varphi}^o \quad (56)$$

второго рода

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\big|_\Sigma=\vec{p}^o,\quad \vec{n}\cdot\hat{\mu}\big|_\Sigma=\vec{m}^o \quad (57)$$

либо смешанные граничные условия. Здесь $\vec{u}^o,\vec{\varphi}^o,\vec{p}^o,\vec{m}^o$ заданные функции – перемещения, углы поворотов частиц, напряжения и распределенные по поверхности моменты пар сил, соответственно.

Примеры частных решений уравнений статики

Пусть массовые силы и распределенные по объему пары сил отсутствуют, а температура среды постоянная. Введем две скалярные функции $U(\vec{r})$, $V(\vec{r})$ - потенциалы перемещений и углов поворотов таким образом, чтобы $\vec{u}=\nabla U$, $\vec{\varphi}=\nabla V$. Подставляя данные выражения в уравнения статики (55), получим систему двух уравнений относительно потенциалов U,V

$$\nabla\left[\left(\lambda_1+2\mu_1\right)\Delta U+\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\Delta V\right]=0$$

$$\nabla\left[\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)\Delta U+\left(\lambda_2+2\mu_2\right)\Delta V-4\chi_1 V\right]=0$$

Приравняем выражения, стоящие под знаком градиента, нулю. Тогда можно записать

$$\Delta U=-\eta\,\Delta V \tag{58}$$

и получить уравнение относительно функции V

$$\Delta V+\omega^2 V=0 \tag{59}$$

Здесь постоянные κ, ω определяются соотношениями

$$\eta=\frac{\lambda_{12}+2\mu_{12}}{\lambda_1+2\mu_1}$$

$$\omega^2=\frac{4\chi_1\left(\lambda_1+2\mu_1\right)}{\left(\lambda_1+2\mu_1\right)\left(\lambda_2+2\mu_2\right)-\left(\lambda_{12}+2\mu_{12}\right)^2} \tag{60}$$

Рассмотрим центрально симметричные решения уравнений (58), (59) $U=U(r)$, $V=V(r)$, используя сферическую систему координат (r,θ,α) с базисом $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\alpha)$. Уравнение (59) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}-\omega^2 V=0 \tag{61}$$

общее решение, стремящееся к нулю при $r\to\infty$, содержит произвольную постоянные B и имеет вид [10]

$$V(r)=\frac{B}{r\,e^{\omega r}}$$

А общее решение уравнения

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}=-\omega^2\eta\frac{B}{r\,e^{\omega r}}$$

с точностью до постоянного слагаемого равняется

$$U(r)=-\frac{A}{r}-B\frac{\eta}{r\,e^{\omega r}}$$

Рассмотрим случай, когда, что соответствует отсутствию перемещений на сфере радиуса $r=a$ и наличию углов поворотов на ней. В этом случае ненулевые компоненты тензоров напряжений $\hat{\sigma}$ и моментных напряжений $\hat{\mu}$ согласно формулам (49) имеют следующий вид

$$\sigma_{11} = B\left\{e^{-\omega a}\frac{4\eta\mu_1(1+\omega a)}{r^3} - \right.$$

$$\left. -e^{-\omega r}\left[\left(\frac{\lambda_1\omega^2}{r} + \frac{2\mu_1(2+2\omega r+\omega^2 r^2)}{r^3}\right)\kappa - \frac{\lambda_{12}\omega^2}{r} - \frac{2\mu_{12}(2+2\omega r+\omega^2 r^2)}{r^3}\right]\right\}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = B\left\{-e^{-\omega a}\frac{2\eta\mu_1(1+\omega a)}{r^3} - \right. \tag{62}$$

$$\left. -e^{-\omega r}\left[\left(\frac{\lambda_1\omega^2}{r} - \frac{2\mu_1(1+\omega r)}{r^3}\right)\kappa - \frac{\lambda_{12}\omega^2}{r} + \frac{2\mu_{12}(1+\omega r)}{r^3}\right]\right\}$$

$$\sigma_{23} = -\sigma_{32} = 2\chi_1 B e^{-\omega r}\frac{1+\omega r}{r^2}$$

$$\mu_{11} = B\left\{e^{-\omega a}\frac{4\eta\mu_{12}(1+\omega a)}{r^3} - \right.$$

$$\left. -e^{-\omega r}\left[\left(\frac{\lambda_{12}\omega^2}{r} + \frac{2\mu_{12}(2+2\omega r+\omega^2 r^2)}{r^3}\right)\kappa - \frac{\lambda_2\omega^2}{r} - \frac{2\mu_2(2+2\omega r+\omega^2 r^2)}{r^3}\right]\right\}$$

$$\mu_{22} = \mu_{33} = B\left\{-e^{-\omega a}\frac{2\eta\mu_1(1+\omega a)}{r^3} - \right. \tag{63}$$

$$\left. -e^{-\omega r}\left[\left(\frac{\lambda_{12}\omega^2}{r} - \frac{2\mu_{12}(1+\omega r)}{r^3}\right)\kappa - \frac{\lambda_2\omega^2}{r} + \frac{2\mu_2(1+\omega r)}{r^3}\right]\right\}$$

$$\mu_{23} = -\mu_{32} = 2\chi_{12} B e^{-\omega r}\frac{1+\omega r}{r^2}$$

Из соотношений (62), (63) следует, что при $r = a$ осевые моменты пар сил относительно оси Or приводят к появлению нормальных напряжений и, наоборот

$$\mu_{11} = Be^{-\omega a}\left[-(\lambda_{12}+2\mu_{12})\frac{\eta\omega^2}{a} + (\lambda_2+2\mu_2)\frac{\omega^2}{a} + 4\mu_2\frac{1+\omega a}{a^3}\right]$$

$$\sigma_{11} = Be^{-\omega a}\left[-(\lambda_{12}+2\mu_{12})\frac{\omega^2}{a} - (\lambda_1+2\mu_1)\frac{\eta\omega^2}{a} + 4\mu_{12}\frac{1+\omega a}{a^3}\right]$$

Равновесие бесконечного пустотелого цилиндрического постоянного магнита в поле линейного тока

Рассмотрим в качестве упругого тела постоянный магнит, имеющий вид бесконечного пустотелого цилиндра с внутренней цилиндрической поверхностью радиуса a и внешней – радиуса b (рис.2). Вдоль оси цилиндра протекает линейный ток силы J, который создает магнитное поле с вектором напряженности $\vec{H}$, равной [8]

$$\vec{H} = \frac{2J}{c\,r}\vec{e}_\theta \qquad (64)$$

где c - скорость света в пустоте, r - радиус цилиндрической системы координат с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра. Обозначим через $\vec{M}$ намагниченность постоянного магнита $\left(\left|\vec{M}\right| = const\right)$. Тогда объемная сила и момент пары сил единицы объема, действующие на постоянный магнит, равны

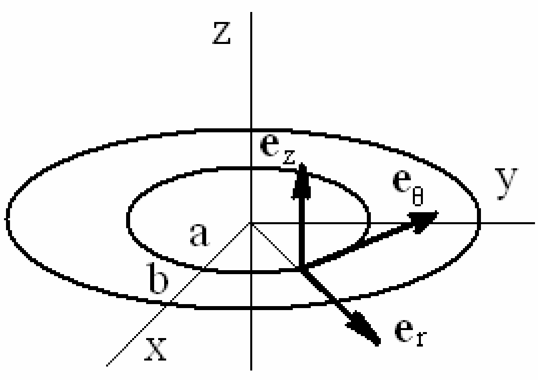

Рис.2

$$\vec{X} = \nabla\left(\vec{M} \cdot \vec{H}\right), \quad \vec{Y} = \vec{M} \times \vec{H} \qquad (65)$$

Пусть в отсутствии тока вектор намагниченности направлен вдоль оси Oz $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$. При протекании тока J по оси цилиндра вектор $\vec{M}$, не меняя модуля, поворачивается на малый угол $\vec{\varphi} = \varphi_r\vec{e}_r + \varphi_\theta\vec{e}_\theta + \varphi_z\vec{e}_z$ и принимает следующие значения с точностью до малых второго порядка по $\vec{\varphi}$

$$\vec{M} = M\left(\vec{e}_z + \vec{\varphi} \times \vec{e}_z\right) = M\left(\varphi_\theta\vec{e}_r - \varphi_r\vec{e}_\theta + \vec{e}_z\right) \qquad (66)$$

В рассматриваемом случае характеристики магнитного поля зависят от деформированного состояния среды, Следовательно, требуется решать совместную задачу определения магнитного поля и поля перемещений с поворотами. Уравнения статики должны быть дополнены уравнениями магнитостатики, которые имеют следующий вид[8]

$$div\,\vec{H} = 0, rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (67)$$

внутри цилиндров $(r < a)$,

$$div\,\vec{B} = 0, rot\,\vec{H} = 0, \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \qquad (68)$$

между цилиндрами $(a < r < b)$ и

$$div\,\vec{H} = 0, rot\,\vec{H} = 0 \qquad (69)$$

вне цилиндров $(b < r < \infty)$.

В соотношениях (68) намагниченность $\vec{M}$ определяется віражением (66). На границе упругого тела $(r = a, b)$ должны выполняться известные условия непрерывности

$$\left\langle B_n \right\rangle = 0, \left\langle \vec{H}_\tau \right\rangle = 0 \qquad (70)$$

где угловые скобки означают скачок характеристики при переходе через границу, B_n - нормальная составляющая вектора магнитной индукции, $\vec{H}_\tau$ - касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля на соответствующей границе. Представим магнитное поле в виде суммы двух полей $\vec{H}^0$, соответствующего магнитному полю линейного тока в пустоте, определяемого соотношением (64), и индуцированного магнитного поля $\vec{h} = h_r\vec{e}_r + h_\theta\vec{e}_\theta + h_z\vec{e}_z$:

$\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{h}$. Тогда $\vec{B} = \vec{H}^0 + \vec{h} + 4\pi M\left(\vec{e}_z + \varphi_\theta \vec{e}_r - \varphi_r \vec{e}_\theta\right)$, а уравнения (67)-(69) становятся уравнениями относительно $\vec{h}$

$$div\,\vec{h} = 0,\, rot\,\vec{h} = 0,\ (0 < r < a, b < r < \infty)$$

$$div\,\vec{h} + 4\pi M\left(\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial r} + \frac{\varphi_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta}\right) = 0,\, rot\,\vec{h} = 0,\ (a < r < b, b < r < \infty) \tag{71}$$

Видно, что $\vec{h}$ является потенциальным вектором: $\vec{h} = \nabla\psi,\ div\,\vec{h} = \Delta\psi$. Тогда граничные условия (70) принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(a^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial r}\left(a^-,\theta,z\right) + 4\pi M\varphi_\theta\left(a^+,\theta,z\right) = 0 \\
\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(a^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(a^-,\theta,z\right) = 0,\, \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(a^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(a^-,\theta,z\right) = 0 \\
\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(b^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial r}\left(b^-,\theta,z\right) + 4\pi M\varphi_\theta\left(b^+,\theta,z\right) = 0 \\
\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(b^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(b^-,\theta,z\right) = 0,\, \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(b^+,\theta,z\right) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(b^-,\theta,z\right) = 0
\end{gathered} \tag{72}$$

с условиями на бесконечности

$$\left|\psi\right| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \tag{73}$$

Уравнения статики, имеющие вид (55), дополним граничными условиями

$$\vec{u}\,|_{r=b} = 0, \quad \vec{n}\cdot\hat{\sigma}\,|_{r=a,b} = 0, \quad \vec{n}\cdot\hat{\mu}\,|_{r=a,b} = 0 \tag{74}$$

соответствующими отсутствию напряжений и моментов пар сил на внутренней поверхности цилиндра, отсутствию перемещений и моментов пар сил на внешней поверхности цилиндра.

Предположим, что $u_\theta = u_z = \varphi_\theta = \varphi_z = 0$ и будем разыскивать решение задачи в виде $\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_r,\quad \vec{\varphi} = \varphi(r)\,\vec{e}_r,\ \ \psi = \psi(r)$.Тогда согласно формулам (65) получим следующее выражение для объемных сил и моментов пар сил

$$\vec{X} = \frac{A}{r^2}\left(r\frac{d\varphi}{dr} - \varphi\right)\vec{e}_r, \quad \vec{Y} = -\frac{A}{r}\vec{e}_r + M\frac{d\psi}{dr}\vec{e}_\theta \quad \left(A = \frac{2JM}{c}\right) \tag{75}$$

Дважды ковариантные тензоры $\hat{\varepsilon},\hat{\gamma},\hat{\kappa},\hat{K}$ при данных предположениях имеют следующий вид

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \dfrac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & ru_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\varphi_r \\ 0 & r\varphi_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\kappa}=\begin{pmatrix} \dfrac{d\varphi_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & r\varphi_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{K}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Уравнения равновесия в этом случае сводятся к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка относительно неизвестных $u(r),\varphi(r),\psi(r)$

$$\begin{gathered}(\lambda_1+2\mu_1)\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}\right)+ \\ +(\lambda_{12}+2\mu_{12})\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)+A\left(\frac{\varphi}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)=0\end{gathered} \tag{77}$$

$$M\frac{d\psi}{dr}=0 \tag{78}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_{12}+2\mu_{12})\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}\right)+ \\ +(\lambda_2+2\mu_2)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)-4\chi_1\varphi=\frac{A}{r}\end{gathered} \tag{79}$$

Откуда видно, что можно положить $\psi\equiv 0$, т.е. индуцируемое магнитное поле в данном случсае отсутствует, уравнения (71), (72) тождественно удовлетворяются.

Граничные условия (74) участвуют компоненты σ_{11},μ_{11}, которые имеют вид

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}\equiv\left[(\lambda_1+2\mu_1)\frac{du}{dr}+\lambda_1\frac{u}{r}+(\lambda_{12}+2\mu_{12})\frac{d\varphi}{dr}+\lambda_{12}\frac{\varphi}{r}\right]_{r=a}=0\\ &\mu_{11}\equiv\left[(\lambda_{12}+2\mu_{12})\frac{du}{dr}+\lambda_{12}\frac{u}{r}+(\lambda_2+2\mu_2)\frac{d\varphi}{dr}+\lambda_2\frac{\varphi}{r}\right]_{r=a,b}=0\\ &u\big|_{r=b}=0\end{aligned} \tag{80}$$

Введем безразмерные переменные согласно следующим формулам

$$A_1=\frac{\lambda_{12}+2\mu_{12}}{a\left(\lambda_1+2\mu_1\right)},\quad A_2=\frac{A}{a\left(\lambda_1+2\mu_1\right)},\quad L_{12}^{-1}=a^2\,\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_2+2\mu_2}$$

$$C_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1},\qquad C_2=\frac{\lambda_{12}}{a\left(\lambda_1+2\mu_1\right)},\quad D_1=C_2L_{12}^{-1}$$

$$D_2=\frac{\lambda_2}{a\left(\lambda_2+2\mu_2\right)},\; B_2=4a^2\,\frac{\chi_1}{\lambda_2+2\mu_2},\; B_3=A_2L_{12}^{-1}$$

Тогда краевая задача для определения $u(r),\varphi(r)$ может быть записана следующим образом

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{u}{r^2}++A_1\left(\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}-\dfrac{\varphi}{r^2}\right)+A_2\left(\dfrac{\varphi}{r^2}-\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}\right)=0\\ B_1\left(\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{u}{r^2}\right)+\dfrac{d^2\varphi}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr}-\dfrac{\varphi}{r^2}-B_2\varphi=A_2L_{12}^{-1}\dfrac{1}{r}\end{cases}$$

$$\frac{du}{dr}+C_1u+A_1\frac{d\varphi}{dr}+C_2\varphi=0\qquad (r=1)\tag{81}$$

$$B_1\frac{du}{dr}+D_1u+\frac{d\varphi}{dr}+D_2\varphi=0\qquad (r=1)$$

$$u(b)=0,\quad B_1\frac{du}{dr}+\frac{d\varphi}{dr}+D_2\frac{\varphi}{b}=0\quad (r=b)$$

В случае $\lambda_{12}=\chi_1=0$ имеем $A_1=B_1=B_2=C_2=D_1=0$. Соответствующее решение краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}u(r)&=c_1\frac{r}{2}+\frac{c_2}{r}+c_4A_2\frac{\ln(r)}{r}+A_2B_3r\frac{2\ln(r)-1}{8}\\ \varphi(r)&=c_3r+\frac{c_4}{r}+B_3r\frac{2\ln(r)-1}{4}\end{aligned}\tag{82}$$

где постоянные c_1,c_2,c_3,c_4 определяются из граничных условий. Граики зависимостей $u=u(r),\varphi=\varphi(r)$ для значений параметров, равных $\lambda_1=\mu_1=_{10}7,\lambda_2=\mu_2=_{10}6$ приведены на рис.2.

Вычисления проводились для числовых параметров: $a=0.1,\quad b=0.3$ и феноменологических коэффициентов, отраженных в таблице 1.

Таблица 1

№ варианта	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2	λ_{12}	μ_{12}	χ_1	χ_1
1	10^5	10^5	0	10^{-2}	10^{-2}	1	10^3	10^4
2	10^5	10^5	10^4	10^{-2}	10^{-2}	10	10^3	10^4
3	10^5	10^5	10^4	10^2	10^2	100	10^3	10^4

Результаты вычислений представлены на рис.3-5 в виде графиков функций $u(r) = u_r(r), \varphi(r) = \varphi_r(r)$.

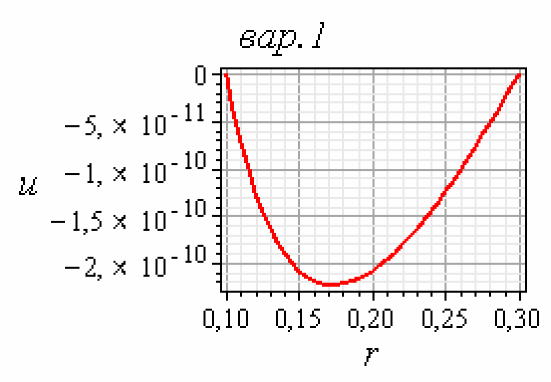

Рис.3

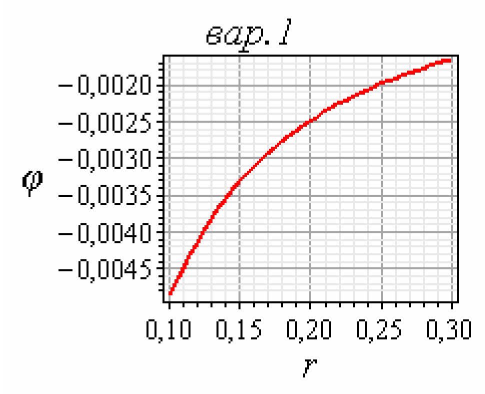

Рис.4

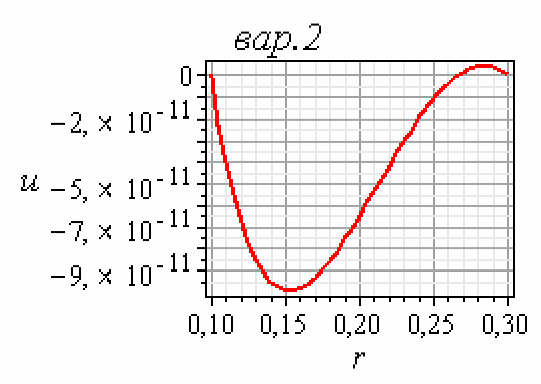

Рис.5

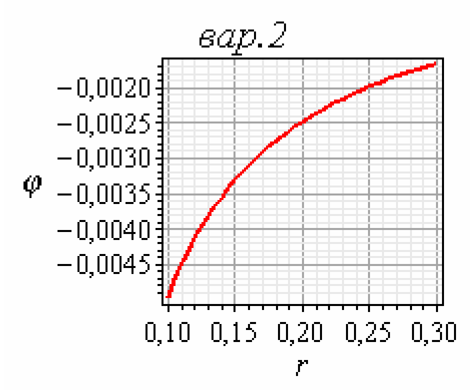

Рис.6

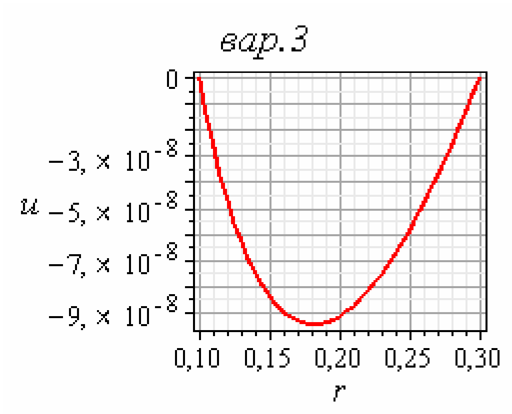

Рис.7

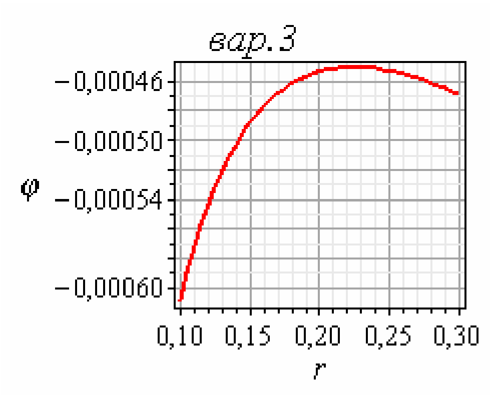

Рис.8

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т.1. М.: Наука.-1976.-536 с.
2. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002.-516 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир. 1974.-304 с.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т.1. М.: Наука.-1972. -530 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир.-1975.-872 с.
6. Воронин Г.Ф. Основы термодинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.-192 с.
7. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.-280 с.
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. - 1976. - 616 с.
9. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.1: Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Золотые страницы, 2003. - 320 с.
10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Изд-во "Высшая школа", 1970. - 712 с.

Навчальне видання

ТЕРМОДИНАМІКА ПРУЖНЬО ДЕФОРМУЄМОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Методичний посібник
для студентів III-IV курсів
спеціальності "Механіка"

Укладач ІЄВЛЕВ Іван Іванович

Відповідальний за випуск І. І. Ієвлев